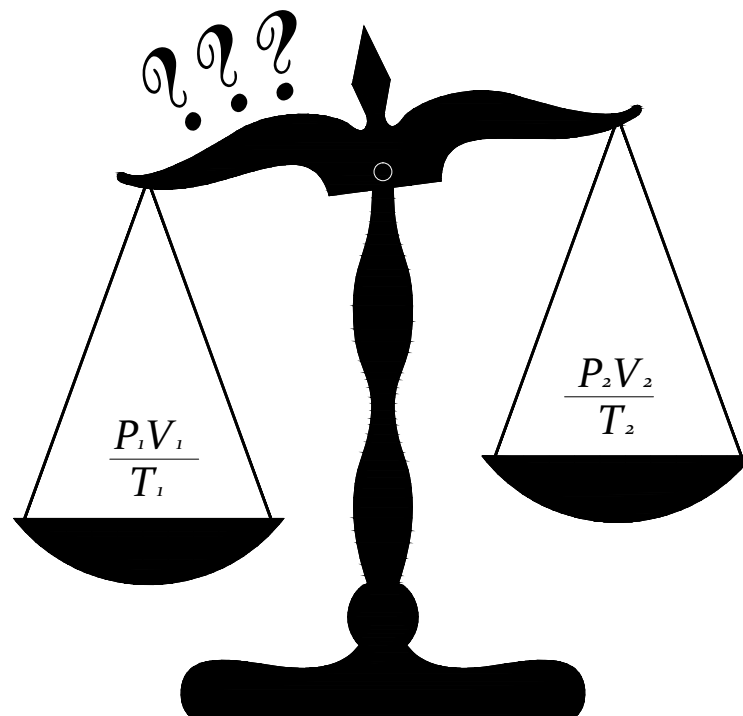

MÉTHODES D'ESTIMATION

Professeur Bertrand MERMINOD



Faculté de l'Environnement Naturel Architectural et Construit
Institut d'Ingénierie de l'Environnement
GÉOMATIQUE - TOPOMÉTRIE

Lausanne, nouvelle édition, décembre 2022

Préface

Le mouvement des astres et la forme de la Terre sont observés de façon précise depuis longtemps. Alors que les (al-)chimistes, les biologistes et même les physiciens étaient absorbés par l'étude de phénomènes difficiles à mesurer et à modéliser, les astronomes et les géodésiens ont développé des outils de calcul pour profiter au maximum de leurs mesures précises. L'évolution de la *théorie des erreurs* était souvent liée à son domaine d'application. Ainsi, des outils semblables ont été décrits avec des terminologies et des notations différentes. Typiquement, le *calcul de compensation* était surtout lié à la formation des géomètres. Des innovations dans un domaine ont tardé à en gagner d'autres. Pourtant, les interactions sont nombreuses et la synergie est immense.

Quelques notions de statistique suffisent pour démarrer : l'*espérance*, la *variance* et la *corrélation* sont définies au début de cet ouvrage. Toutefois, l'usage parallèle d'un livre de référence demeure vivement recommandé, notamment pour les lois de distribution et les tests d'hypothèses. Peu d'ingénieurs réalisent que des procédés bien établis dans des domaines différents, comme la *compensation paramétrique* et la *régression multiple*, reposent sur le même raisonnement. Renoncer à l'une des approches est une simplification attractive, mais elle nous priverait de l'accès à tout un pan de littérature. Lorsqu'une terminologie normalisée existe, nous l'avons adoptée. Sinon, nous avons jeté quelques ponts en faisant apparaître les similarités.

Dans de nombreuses sciences, la modélisation des phénomènes et la qualité des mesures se sont affinées de façon notoire. De plus, les moyens de calcul permettent de traiter ces données sur une base théorique solide. Les méthodes d'estimation aident à concevoir des manipulations et à interpréter leurs résultats, tant sur le terrain qu'au laboratoire. Elles font appel à la connaissance du phénomène observé et au sens pratique autant qu'à la rigueur mathématique. La vraie difficulté consiste à mettre en œuvre des connaissances jusque-là éparses : analyse, algèbre linéaire, statistique, programmation. Un modèle de réflexion est proposé et la maîtrise des concepts s'acquiert par la confrontation avec des problèmes concrets.

Dans ce polycopié, quelques exemples résolus et commentés en détail favorisent un apprentissage autonome. Toutefois cet ouvrage est conçu pour accompagner un cours qui privilégie les éléments interactifs : présentation des concepts, exemples, diaporamas, animations. Le cours vise à exprimer des problèmes sous forme mathématique et à comparer diverses manières de les résoudre. La programmation est essentielle pour résoudre la plupart des exercices, or le polycopié évite l'usage explicite d'un langage informatique, qui change avec l'évolution du plan d'études.

La variété des contextes devrait motiver la plupart des étudiantes et des étudiants pour cette branche des mathématiques appliquées. Quel que soit le domaine d'activité envisagé, les méthodes d'estimation développent le pragmatisme scientifique de l'ingénieur-e.

Table des matières

Préface	iii	3.8 Exercices non-résolus	68
Table des matières	v	4 Compensation paramétrique	73
Notations	vi	4.1 Introduction	73
Survol historique	ix	4.2 Dérivation des formules	74
1 Éléments de statistique	1	4.3 Itérations et convergence	77
1.1 Classification des erreurs		4.4 Calcul des cofacteurs	78
d'observation	1	4.5 Ecart-type <i>a posteriori</i>	80
1.2 Erreurs vraies et erreurs résiduelles	4	4.6 Analyse des résultats	81
1.3 La corrélation	8	4.7 Partition des paramètres	82
1.4 Interprétation probabiliste de la		4.8 Compensation paramétrique /	
notion d'écart-type	15	régression multiple	84
2 Propagation d'erreur	21	4.9 Exercices résolus	87
2.1 Introduction	21	4.10 Exercices non-résolus	103
2.2 Linéarisation	22	5 Fiabilité	107
2.3 Propagation d'erreur vraie	24	5.1 Fiabilité : expression et interprétation	107
2.4 Propagation de variance	27	5.2 Fiabilité interne	111
2.5 Poids et cofacteurs	30	5.3 Autres indicateurs de fiabilité . . .	114
2.6 Exercices résolus	34	5.4 Fiabilité externe	117
2.7 Exercices non-résolus	43	5.5 Exercice résolu	119
3 Compensation conditionnelle	47	6 Problèmes combinés	125
3.1 Introduction	47	6.1 Cas combiné : conditionnelle avec	
3.2 Dérivation des formules	48	paramètres	125
3.3 Calcul des cofacteurs	51	6.2 Modèle paramétrique avec	
3.4 Ecart-type <i>a posteriori</i>	53	contraintes	129
3.5 Quotient d'erreur moyenne	55	6.3 Expressions alternatives et extensions	131
3.6 Analyse des résidus compensés . .	56	6.4 Exercices résolus	133
3.7 Exercices résolus	61	Bibliographie	141

Notations

Algèbre linéaire et statistique

s	scalaire, élément d'un vecteur ou d'une matrice
$\mathbf{s}$	vecteur
$\mathbf{S}$	matrice
$\mathbf{I}_n$	matrice-identité de dimension n
$E\{s\}$	espérance mathématique de s
σ^2, σ	variance, écart-type (erreur moyenne)
ρ	corrélation

Etat d'une variable

s	valeur mesurée
$\check{s}$	valeur vraie
$\mathring{s}$	valeur approchée pour linéariser (non stochastique, variance nulle)
$\bar{s}$	valeur moyenne
$\hat{s}$	valeur compensée, estimée

Propagation d'erreur

$\ell, \boldsymbol{\ell}$	observation (variable aléatoire), vecteur d'observations
$f(\boldsymbol{\ell})$	fonctions des observations
$\mathbf{K}_{\ell\ell}$	matrice de covariance des observations
σ_0	écart-type <i>a priori</i> d'une observation de poids unitaire
$\mathbf{Q}_{\ell\ell}$	matrice des cofacteurs des observations, telle que : $\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell}$
$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$	matrice des poids des observations
$\mathbf{F} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\ell})}{\partial \boldsymbol{\ell}}$	matrice des coefficients (dérivées partielles)
$\mathbf{K}_{ff}$	matrice de covariance des fonctions des observations : $\mathbf{K}_{ff} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^\top$
$\mathbf{Q}_{ff}$	cofacteurs des fonctions des observations : $\mathbf{Q}_{ff} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^\top$ avec $\mathbf{K}_{ff} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{ff}$

Compensation conditionnelle

n	nombre d'observations
r	redondance, surdétermination, nombre de conditions indépendantes
w, w	écart de fermeture, vecteur des écarts de fermeture
v, v	résidu, vecteur des résidus
$B = \frac{\partial f(\ell)}{\partial \ell}$	matrice des coefficients (dérivées partielles)
$\Omega = v^\top P v$	forme quadratique à minimiser
$Q_{\hat{v}\hat{v}}$	cofacteurs des résidus compensés
$Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$	cofacteurs des observations compensées
$\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_0$	variance, écart-type <i>a posteriori</i> d'une observation de poids unitaire

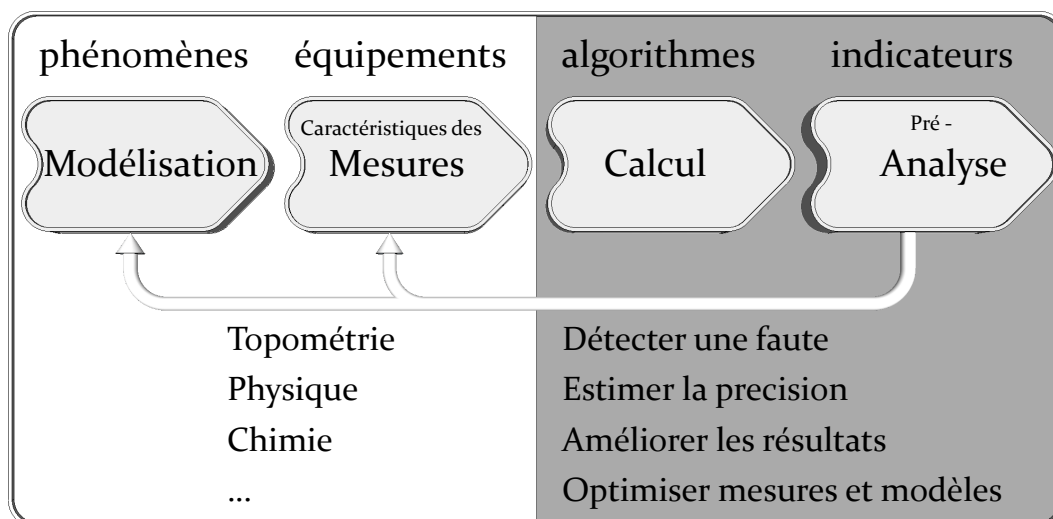
Compensation paramétrique

u	nombre de paramètres (inconnues)
x, x	paramètre, vecteur des paramètres
δx	incrément d'un paramètre, à partir de la valeur choisie pour linéariser
$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$	matrice des coefficients (dérivées partielles)
$Q_{\hat{x}\hat{x}}$	cofacteurs des paramètres compensés

Fiabilité

w_i	résidu standardisé
z_i	part de redondance
$\nabla \ell_i$	Plus petite faute détectable ou plus grande faute non détectable de l'observation ℓ_i

Chemin de réflexion



Les points essentiels pour un-e ingénieur-e :

- Avant calcul : établir des modèles fonctionnels et stochastiques pertinents pour les observations.
- Après calcul : interpréter les résultats d'une compensation, le cas échéant réviser les modèles.

Survol historique

A la base des méthodes d'estimation, on trouve la méthode des moindres carrés, inventée de manière indépendante et presque simultanée par Legendre à Paris et par Gauss à Göttingen au début du 19^e siècle. Durant son histoire bicentenaire, la méthode des moindres carrés a connu des développements marquants. Les premiers succès du procédé furent la compensation d'observations astronomiques [Chabert 1989].

Les formulations difficiles de Gauss et de Bessel, qui poursuivirent le développement de la méthode, furent simplifiées et exprimées de façon plus accessible. Toutefois, ce n'est que dans la seconde moitié du 19^e siècle que la méthode des moindres carrés s'est imposée pour le calcul des réseaux de triangulation. Bien sûr, la compensation de grands réseaux posait d'immenses problèmes numériques, mais la répartition arbitraire des inconsistances des mesures prenait fin.

Vers 1950, le calcul matriciel fut utilisé pour la résolution de problèmes de compensation. Toute la théorie est devenue beaucoup plus limpide. En particulier, la compensation d'observations corrélées trouvait une expression générale.

En 1960, le géodésien hollandais Baarda a publié une formulation mathématique du vieil adage : *Eine Messung ist keine Messung*. La théorie de la fiabilité permet de quantifier le contrôle mutuel des mesures [Baarda 1968]. Sur cette base, on peut les disposer de manière à détecter d'éventuelles fautes. Dans les années suivantes, l'essor de l'informatique a donné une grande impulsion aux méthodes d'estimation. Enfin, l'effort nécessaire au calcul n'était plus un obstacle. La prolifération des ordinateurs a permis de généraliser l'usage de la compensation rigoureuse, d'abord pour les travaux topométriques, mais aussi pour ajuster les proportions des composants entrant dans le four d'une cimenterie.

Pendant ces dernières décennies, les progrès ont porté surtout sur les algorithmes séquentiels, pour estimer des paramètres qui changent avec le temps. L'intérêt est évident en navigation : au lieu d'accumuler toutes les observations pour les traiter en un seul bloc, chaque nouveau groupe d'observations est ajouté au calcul pour obtenir immédiatement la meilleure position. Favorisé par les microprocesseurs embarqués, le pilotage en temps réel de nombreux processus fait appel au *filtre de Kalman*. Le lecteur désireux d'approfondir ce thème est invité à consulter [Skaloud 2013].

Un usage séquentiel de mesures ultérieures pour améliorer une estimation est appelé *lissage récurrent (smoothing)*. Après la mission, on remonte le temps pour améliorer les estimations obtenues en temps réel par filtrage. Par nature, cette méthode est confinée au post-traitement. Le résultat d'un filtrage suivi d'un lissage correspond à une interpolation dans le temps, que l'on pourrait aussi réaliser en traitant toutes les observations en un seul bloc. L'interpolation est un processus très général, applicable également dans le domaine spatial. En géostatistique, elle est appelée *krigeage*. La combinaison d'une compensation et d'une interpolation est nommée *collocation*.

1 Éléments de statistique

1.1 Classification des erreurs d'observation

L'expérience montre que n'importe quelle mesure est entachée d'une certaine imprécision appelée **erreur d'observation**. On le constate dès qu'on mesure plusieurs fois le même angle ou encore les trois angles d'un triangle, dont la somme devrait valoir exactement 200 gons. En fait, on obtient des écarts plus ou moins importants, qu'on peut classer de manières diverses.

1.1.1 Classification selon la cause

Essentiellement, on peut former trois groupes de sources d'erreurs, selon qu'elles sont liées à l'objet observé, au moyen d'observation ou à l'observateur. Par exemple en topométrie, on peut expliciter ces trois catégories.

Erreurs liées au terrain et à la météorologie instabilité du trépied, variation des conditions d'éclairage, anomalies de la pesanteur, phénomènes locaux de réfraction latérale ou verticale, etc.

On peut tenir compte de certaines sources d'erreurs en modélisant leurs effets, mais c'est parfois difficile, voire impossible. Fréquemment, on réduit l'incertitude sur la connaissance de l'atmosphère en mesurant sous des conditions météorologiques variées ou en excluant certaines périodes défavorables.

Erreurs d'origine instrumentale jeu des ajustages mécaniques, excentricité des cercles, erreurs de graduation des cercles, erreurs d'ajustage des axes, constantes d'addition, erreurs cycliques, instabilité de la fréquence de mesure, etc.

Les techniques de mesure s'efforcent de réduire autant que possible l'effet de ces erreurs. On élimine un grand nombre d'erreurs instrumentales du théodolite en mesurant les angles dans les deux positions de la lunette et en plusieurs séries.

Erreurs liées à l'observateur pointé imprécis, parallaxe due à de mauvais réglages optiques, estimations micrométriques défaillantes, fatigue, etc.

L'expérience et le sens critique permettent d'éviter ou de réduire de telles erreurs.

1.1.2 Classification selon l'effet

On distingue généralement les erreurs grossières, les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires. Entre ces deux dernières classes, on peut établir une catégorie intermédiaire : les erreurs corrélées, qui font l'objet de la section suivante.

Les erreurs grossières ou fautes Ce sont des erreurs provoquées par l'inattention de l'observateur ou un mauvais fonctionnement de l'appareil. Des exemples typiques sont la faute d'un mètre lors d'une lecture sur la chevillère, d'un gon lors de la lecture au théodolite ou encore la mesure faite avec un double-mètre lu à l'envers.

Le dispositif de mesure et les contrôles effectués doivent permettre de détecter ce type de fautes. Ensuite, celles-ci doivent être éliminées ou de préférence corrigées, car le plus souvent la partie fine de la mesure est correcte.

Les erreurs systématiques Ce sont des erreurs qui surviennent lorsqu'un phénomène physique a été négligé dans le modèle choisi pour décrire la grandeur observée. Sous des conditions identiques, ces erreurs présentent le même signe et la même grandeur. Par exemple, la dilatation thermique d'une mire ou d'une chevillère provoque des erreurs systématiques si l'influence de la température n'est pas prise en compte.

Ce sont donc le plus souvent des *erreurs de modèle* ou des *erreurs d'étalonnage*. D'une manière générale, la difficulté est de représenter la réalité physique d'une mesure par un modèle le plus simple possible, mais qui prenne néanmoins en considération toutes les influences non négligeables. Par exemple, le modèle d'un rayon lumineux rectiligne convient très bien pour des visées angulaires planimétriques ; mais pour des visées altimétriques, la courbure due à la réfraction atmosphérique dans un plan vertical doit être prise en compte.

Les erreurs aléatoires Malgré l'élimination des principales sources d'erreur par des procédures de mesure et des modèles appropriés, il subsiste toute une série d'erreurs résiduelles obéissant à des lois impossibles à connaître rigoureusement. Citons par exemple la différence entre la température effective d'une chevillère et celle lue sur le thermomètre, ou la variation de la réfraction due à la brève apparition du soleil dans une atmosphère très humide. Tous ces effets se combinent en une erreur qui n'obéit pas à une loi précise ; en général on ne peut prévoir sa valeur ou même son signe.

L'expérience et le calcul des probabilités ont permis de constater que lorsque ces erreurs surviennent en grand nombre, on peut déceler une **loi de fréquence** : les petites erreurs sont beaucoup plus fréquentes que les grandes et il y en a autant de positives que de négatives. On admet généralement que les erreurs aléatoires sont distribuées selon la **loi de Gauss** représentée par la courbe en cloche (voir théorème central limite, cours de statistique).

Exemple

Lorsqu'une personne bouge sur une balance, le poids indiqué est tantôt trop petit et tantôt trop grand. L'erreur commise est de caractère essentiellement aléatoire. Si la balance est posée sur une moquette épaisse ou que sa tare est mal réglée, l'erreur commise est de nature systématique. Si une personne se pèse avec un nombre variable d'habits, le poids obtenu

est toujours exagéré, mais l'erreur commise est partiellement aléatoire puisqu'elle dépend de la tenue qui varie selon les goûts et les saisons. A défaut d'indication complémentaire, la notion de "poids habillé" inclut des erreurs de plusieurs types.

Où s'arrêter?

Même un dispositif de mesure de grande qualité n'a pas une précision illimitée et il faut bien fixer des tolérances en fonction de la précision effectivement nécessaire. La mesure peut alors s'effectuer avec une certaine "imprécision" compatible avec ces tolérances. Par définition, les erreurs grossières sont incompatibles avec la tolérance et doivent être éliminées. En revanche, il faut tolérer certaines erreurs systématiques ou aléatoires, ne serait-ce que pour des raisons économiques. Sur la base de ces quelques réflexions, on peut déjà définir un objectif du calcul de compensation.

*La complexité des mesures et des modèles
doit être compatible avec la précision exigée.*

1.2 Erreurs vraies et erreurs résiduelles

1.2.1 Définition

La relation suivante définit l'erreur.

Observation – erreur = modèle

$$\ell_i - v_i = L \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

Nous considérons deux modèles.

Erreur vraie. On connaît la valeur vraie $\check{\ell}$ et l'on pose $L = \check{\ell}$. Ce modèle est réaliste si l'on peut comparer l'observation à analyser avec le résultat d'un autre procédé de mesure sensiblement meilleur, typiquement lorsque l'on calibre une balance avec une masse connue exactement. Autre exemple : si l'on mesure une différence de niveau par nivellement trigonométrique (précision ± 5 cm) et par nivellement géométrique (précision ± 1 mm), la seconde valeur est "*quasi-vraie*".

Observation - erreur vraie = valeur vraie

$$\ell_i - \varepsilon_i = \check{\ell} \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

Ceci correspond à la notation des statisticiens : $y_i = \mu + \varepsilon_i$

Erreur résiduelle. On calcule la valeur moyenne $\bar{\ell}$ et l'on pose $L = \bar{\ell}$. Une telle estimation est réaliste si l'on dispose de plusieurs observations de la même grandeur, indépendantes, de même précision et entachées uniquement d'erreurs aléatoires.

Observation – erreur résiduelle = valeur moyenne

$$\ell_i - \bar{v}_i = \bar{\ell} \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

Ceci correspond à la notation des statisticiens : $y_i = \hat{y} + r_i$ pour le cas particulier où la valeur estimée $\hat{y}$ est la moyenne $\bar{y}$.

On note les relations suivantes.

$$\bar{\ell} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ell_i \text{ et } \sum_{i=1}^n \bar{v}_i = 0$$

Dans ce cours, on spécifie l'état d'une variable avec un exposant centré, par exemple $\bar{v}$ pour l'erreur résiduelle. Quant au v , il est issu d'une tradition germanique (Verbesserung).

1.2.2 Indicateurs de précision : écart-type ou erreur moyenne

En statistique, l'espérance $E\{X\}$ d'une variable aléatoire discrète X est la moyenne de ses réalisations, pondérée par la probabilité de leur occurrence.

Ensuite on définit la variance : $\text{Var}(X) = E\{(X - E\{X\})^2\}$

Considérons n mesures ℓ_i de la grandeur connue $\check{\ell}$. L'ensemble des mesures forme le vecteur $\boldsymbol{\ell} = [\ell_1 \dots \ell_n]^\top$.

La variance d'une mesure vaut : $\text{Var}(\ell_i) = \text{E} \left\{ (\ell_i - \check{\ell})^2 \right\} = \text{E} \left\{ \varepsilon_i^2 \right\}$

Avec $n \rightarrow \infty$, on couvre l'ensemble des réalisations. Si la probabilité des mesures est uniforme, l'espérance du carré d'une erreur vaut $\text{E} \left\{ \varepsilon_i^2 \right\} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n}$ et l'on peut exprimer l'écart-type d'une observation.

$$\sigma_{\ell_i} = \sqrt{\text{Var}(\ell_i)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n}}$$

remarque : Il s'agit bien de l'écart-type d'une mesure ℓ_i . Ce n'est pas l'écart-type de la moyenne des observations $\bar{\ell}$, que l'on noterait $\sigma_{\bar{\ell}}$.

Pour $n < \infty$, on obtient une estimation de l'écart-type.

$$\hat{\sigma}_{\ell_i} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n}}$$

Cette formule justifie l'usage fréquent de "valeur RMS", pour Root-Mean-Square. Elle correspond à la définition des statisticiens.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2}$$

1.2.3 Estimation de l'écart-type autour de la moyenne

Pour utiliser les formules précédentes, on doit connaître la valeur vraie $\check{\ell}$ ou l'espérance $\text{E}\{X\}$, donc également les erreurs vraies ε_i . Comme on l'a vu, cette hypothèse est rarement vérifiée. Si l'on estime l'écart-type autour de la moyenne avec n petit, l'influence d'une mesure particulière sur la moyenne n'est pas négligeable et elle biaise le résultat. L'établissement de la formule pour un estimateur non biaisé de l'écart-type permet de se familiariser avec les concepts, ainsi qu'avec la notation matricielle.

On peut exprimer la moyenne par : $\bar{\ell} = \frac{\sum \ell_i}{n} = \frac{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{\ell}}{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{e}}$

avec $\boldsymbol{\ell}$ vecteur des observations ($n \times 1$)
 $\bar{\boldsymbol{v}}$ erreurs résiduelles ou résidus ($n \times 1$)
 $\boldsymbol{e}$ vecteur-unité ($n \times 1$) = $[1, 1, 1, \dots, 1]^\top$.

Partant de $\ell_i - \varepsilon_i = \check{\ell}$ et $\ell_i - \bar{v}_i = \bar{\ell}$, on obtient : $\varepsilon_i = \bar{v}_i + (\bar{\ell} - \check{\ell})$.

On fait la somme des erreurs vraies pour toutes les mesures.

$$\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{e}^\top (\bar{\boldsymbol{v}} + (\bar{\ell} - \check{\ell}) \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^\top \bar{\boldsymbol{v}} + n \cdot (\bar{\ell} - \check{\ell})$$

On fait de même avec les erreurs résiduelles.

$$\boldsymbol{e}^\top \bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{e}^\top (\boldsymbol{\ell} - \bar{\ell} \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^\top \cdot \boldsymbol{\ell} - n \cdot \bar{\ell} = \sum \ell_i - \sum \ell_i = 0$$

Donc la somme des erreurs vraies vaut : $\mathbf{e}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = n \cdot (\bar{\ell} - \check{\ell})$.

Considérons maintenant la somme des carrés des erreurs vraies.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}} + 2 \cdot (\bar{\ell} - \check{\ell}) \cdot \mathbf{e}^\top \bar{\mathbf{v}} + n \cdot (\bar{\ell} - \check{\ell})^2 = \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}} + 0 + n \cdot (\bar{\ell} - \check{\ell})^2$$

Il faut substituer $(\bar{\ell} - \check{\ell})$, que l'on tire de l'équation précédente.

$$(\bar{\ell} - \check{\ell}) = \frac{\mathbf{e}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \frac{1}{n} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)$$

On calcule le carré de cette expression.

$$(\bar{\ell} - \check{\ell})^2 = \frac{1}{n^2} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)^2 = \frac{1}{n^2} \cdot (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \dots + 2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n + \varepsilon_n^2)$$

Les produits croisés $\varepsilon_i\varepsilon_j$ avec $i \neq j$ ne sont pas nuls, toutefois si les mesures sont assez nombreuses et réparties équitablement autour de la valeur vraie, leur somme tend vers zéro.

$$(\bar{\ell} - \check{\ell})^2 = \frac{1}{n^2} \cdot (\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n^2}$$

En substituant on obtient : $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}} + n \cdot \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n^2} = \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n}$, donc $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}}$

ou encore : $\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}}}{n-1}$

Ce résultat permet une substitution dans l'expression de l'écart-type.

$$\boxed{\hat{\sigma}_\ell = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \bar{\mathbf{v}}}{n-1}}}$$

Ainsi, on peut estimer l'écart-type sans connaître la valeur vraie. Il faut plus d'une mesure pour que le calcul de la moyenne ait un sens, donc il est logique que la formule exige $n > 1$.

On ne manquera pas de faire le lien avec deux éléments du cours de statistique.

1. la formule introduite pour l'écart-type :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

2. le lemme qui spécifie que le carré moyen dû à l'erreur :

$$CM_e = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \bar{y})^2}{n-1} \text{ est un estimateur non biaisé de } \sigma^2.$$

La variance empirique ou *a priori* est toujours désignée par σ^2 , mais la variance estimée ou *a posteriori* est généralement désignée par s^2 en statistique et par $\hat{\sigma}^2$ en calcul de compensation.

Attention ! les formules ci-dessus sont applicables au cas particulier de la moyenne. Dès le chapitre 3, nous aborderons des modèles plus complexes et l'estimation de l'écart-type sera généralisée.

1.3 La corrélation

On considère généralement qu'une erreur vraie ε_i est le cumul de plusieurs erreurs élémentaires provoquées par divers phénomènes. Si ces erreurs élémentaires sont aléatoires et nombreuses, leur somme tend à suivre la loi de Gauss (théorème central limite).

Dans la pratique, seule une partie des erreurs élémentaires possibles se réalise. On peut l'expliquer ainsi : les causes de ces erreurs varient parfois lentement et leur effet sur des mesures répétées rapidement reste sensiblement le même, conférant à leur erreur un caractère systématique, établissant ainsi une certaine **corrélation** entre les mesures, contrairement à des observations dont toutes les sources d'erreur sont strictement aléatoires.

Pour une source d'erreur systématique, la quasi-certitude que son effet va affecter les répétitions d'une même mesure de manière identique peut être interprétée statistiquement par une *corrélation très élevée* entre elles. A l'inverse, les erreurs aléatoires apparaissent comme *statistiquement indépendantes*. Entre ces deux extrêmes, on trouve des mesures corrélées. C'est le cas lorsque des erreurs systématiques ne peuvent être que partiellement éliminées ou modélisées, ou qu'elles se trouvent mélangées avec des erreurs aléatoires.

Pour illustrer ce concept, la figure 1.1 présente la simulation de 100 réalisations d'un couple de variable (x, y) pour différents coefficients de corrélation ρ .

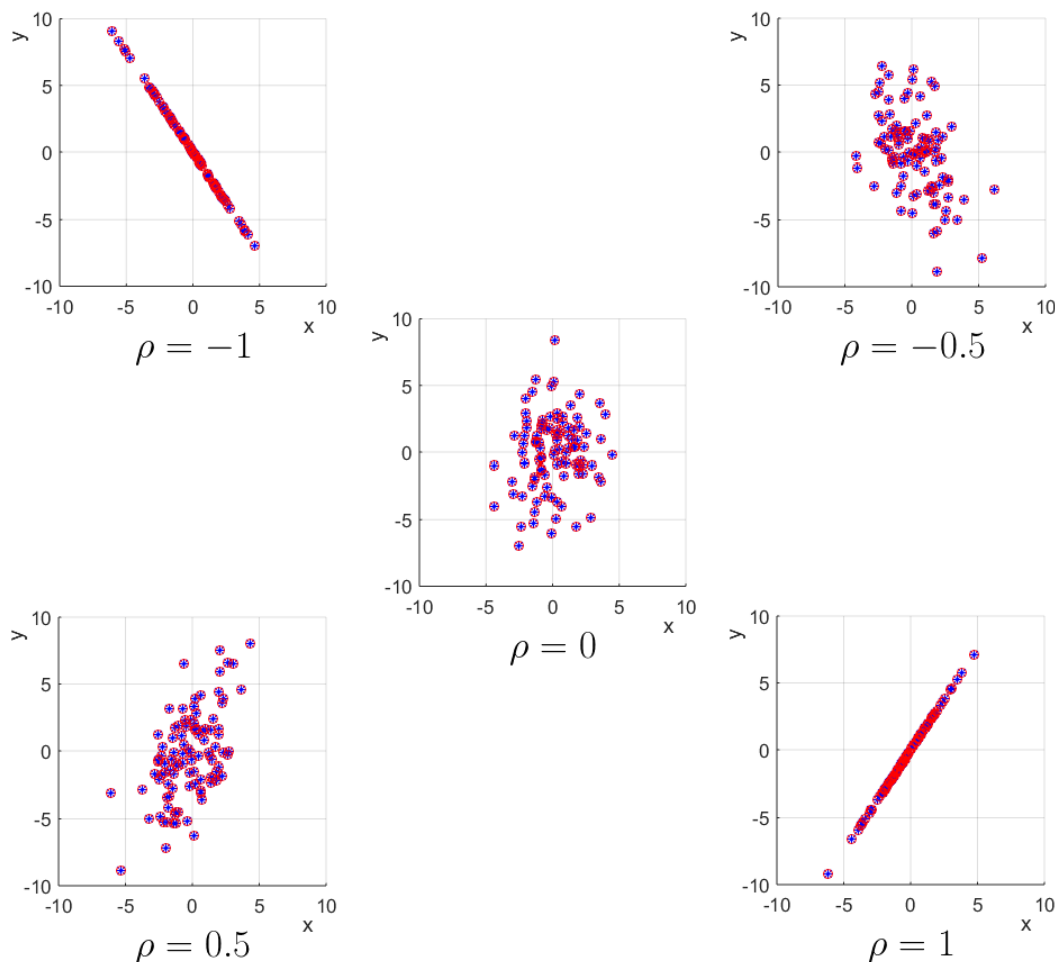


FIGURE 1.1 – Simulation d'un couple de variables aléatoires corrélées avec $\sigma_x = 2$ et $\sigma_y = 3$

1.3.1 Résumé des formules

Formellement, supposons un couple de variables aléatoires (X, Y) représentant n paires d'observations $(\ell_{x_1}, \ell_{y_1}), \dots, (\ell_{x_n}, \ell_{y_n})$. Les vecteurs ℓ_x et ℓ_y contiennent chacun n observations, et les vecteurs ε_x et ε_y les erreurs vraies de ces observations.

Désignons par $\check{x}$ et $\check{y}$ les valeurs vraies et par $\hat{x}$ et $\hat{y}$ les valeurs estimées.

Les formules suivantes sont valables si les observations ℓ_{x_i} sont indépendantes entre elles, de même que les observations ℓ_{y_i} .

	erreurs vraies	erreurs résiduelles
	$n \rightarrow \infty$	$n < \infty$
	définition	estimation
	$\ell_{x_i} - \varepsilon_{x_i} = \check{x}$	$\ell_{x_i} - \hat{v}_{x_i} = \hat{x}$
	$\ell_{y_i} - \varepsilon_{y_i} = \check{y}$	$\ell_{y_i} - \hat{v}_{y_i} = \hat{y}$
Variance de ℓ_{x_i}	$\sigma_x^2 = \frac{\varepsilon_x^\top \varepsilon_x}{n}$	$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\hat{v}_x^\top \hat{v}_x}{n-1}$
Variance de ℓ_{y_i}	$\sigma_y^2 = \frac{\varepsilon_y^\top \varepsilon_y}{n}$	$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{\hat{v}_y^\top \hat{v}_y}{n-1}$
Covariance de ℓ_{x_i} et ℓ_{y_i}	$\sigma_{xy} = \frac{\varepsilon_x^\top \varepsilon_y}{n}$	$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{\hat{v}_x^\top \hat{v}_y}{n-1}$
Coefficient de corrélation de ℓ_{x_i} et ℓ_{y_i}	$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$	$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}$

1.3.2 Exemple 1 : mesure électronique de distances

Dans un bref laps de temps, on a mesuré trois distances ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 avec un appareil électronique depuis une même station. Ces trois distances sont affectées par deux erreurs élémentaires aléatoires ε_{ia} et ε_{ib} , qui suivent une distribution normale.

Les erreurs vraies s'additionnent.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1a} + \varepsilon_{1b}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2a} + \varepsilon_{2b}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{3a} + \varepsilon_{3b}$$

On suppose que ε_{ia} est d'origine instrumentale et peut varier fortement entre des mesures successives, alors que ε_{ib} est lié aux conditions météorologiques. Sur une longue période, il peut prendre des valeurs variées, positives ou négatives, mais il agit comme un facteur

d'échelle constant pendant les 3 mesures. Au final, les erreurs ε_i sont partiellement indépendantes via ε_{ia} et partiellement dépendantes via ε_{ib} . Les mesures sont corrélées par ce facteur d'échelle commun, dont l'estimation est l'une des principales difficultés de la mesure électronique des distances.

1.3.3 Exemple 2 : nivellement trigonométrique (ou nivellement indirect)

Lorsque l'on mesure un angle zénithal entre 2 points distants de plus d'une centaine de mètres, la réfraction atmosphérique - ou plutôt l'imperfection de sa modélisation - constitue la principale source d'erreur.

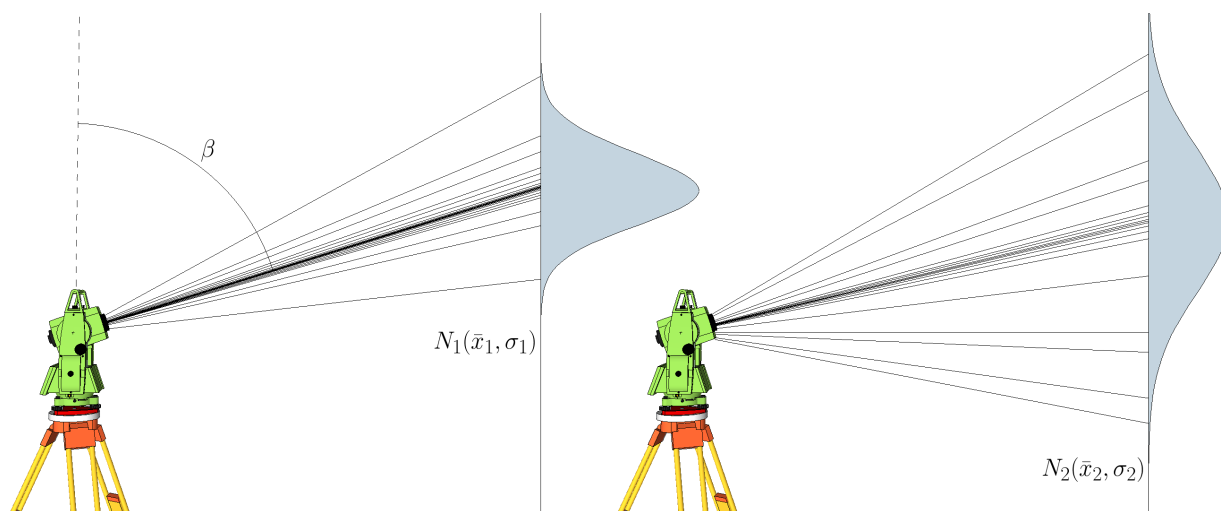


FIGURE 1.2 – détermination altimétrique d'un point par nivellement trigonométrique.

Si l'on détermine la différence de niveau avec un seul appareil, par quelques observations effectuées en un court laps de temps, on obtient une faible dispersion car la réfraction varie très peu entre les mesures. L'échantillon est représenté par la courbe de Gauss $N_1(\bar{x}_1, \sigma_1)$. Ce scénario illustre la notion de *répétabilité* selon la norme ISO 5725-1 : dispersion en conditions stables, *Wiederholbarkeit, repeatability*.

Si l'on mesurait l'angle β pendant de nombreux mois avec divers appareils, divers observateurs et sous toutes sortes de conditions atmosphériques, on obtiendrait pour les altitudes calculées, un échantillon de très grande taille avec une dispersion assez forte due à tous ces facteurs variables. Cet échantillon serait proche de la population totale. Il est représenté par la courbe de Gauss $N_2(\bar{x}_2, \sigma_2)$. Ce scénario illustre la notion de *reproductibilité* selon la norme ISO 5725-1 : dispersion en conditions variées, *Reproduzierbarkeit, reproducibility*.

L'échantillon partiel (schéma de gauche) conduit à une erreur sur l'altitude égale à $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ et à une estimation trop optimiste de la précision ($\sigma_1 \ll \sigma_2$).

1.3.4 Nivellement trigonométrique : exemple numérique

Depuis un point d'altitude inconnue P , on mesure chaque demi-heure pendant 6 heures les angles zénithaux vers deux points A et B d'altitude connue.

A chacune des 12 époques k , on mesure deux fois l'angle β vers A (mesures β_{A_1} et β_{A_2}) et vers B (mesures β_{B_1} et β_{B_2}). On obtient ainsi 48 mesures (ou 24 paires de mesures, ou 12 paires de mesures doubles).

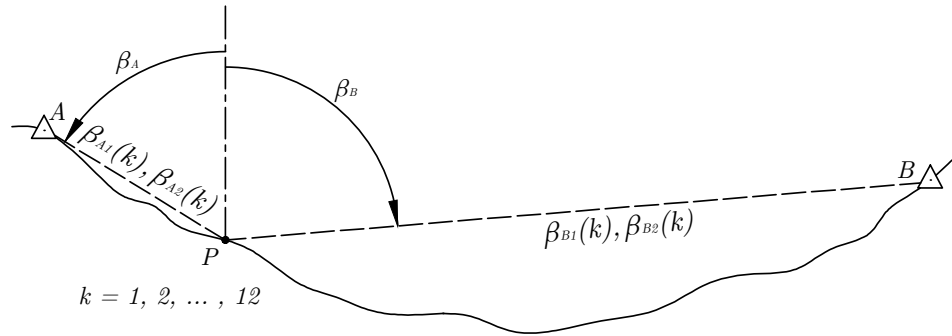


FIGURE 1.3 – angles zénithaux de P vers deux points A et B .

Chaque mesure permet de calculer l'altitude H du point P par *nivellement trigonométrique*. Pour ce calcul, on suppose que la réfraction atmosphérique génère une courbure uniforme de la visée. En adoptant la valeur standard de 0.13 pour l'indice de réfraction, on admet que la courbure de la visée est environ 8 fois plus faible que celle de la Terre.

Par *nivellement géométrique*, on a également déterminé pour le point P une altitude de 63.319 m qui est une valeur "quasi vraie" permettant de calculer pour chaque mesure une erreur vraie ε_i .

On peut ainsi établir le tableau des altitudes et des erreurs vraies. Les valeurs numériques ci-dessous sont issues de [Höpcke 1980, p. 49].

		mesure vers le point A $H_A(k) - \varepsilon_A(k) = 63.319$				mesure vers le point B $H_B(k) - \varepsilon_B(k) = 63.319$			
k	Heure	H_{A_1} [m]	ε_{A_1} [cm]	H_{A_2} [m]	ε_{A_1} [cm]	H_{B_1} [m]	ε_{B_1} [cm]	H_{B_2} [m]	ε_{B_2} [cm]
1	10 : 00	63.356	3.7	63.354	3.5	63.456	13.7	63.479	16.0
2	10 : 30	63.351	3.2	63.366	4.7	63.338	1.9	63.324	0.5
3	11 : 00	63.360	4.1	63.354	3.5	63.423	10.4	63.399	8.0
4	11 : 30	63.343	2.4	63.326	0.7	63.316	-0.3	63.302	-1.7
5	12 : 00	63.367	4.8	63.371	5.2	63.479	16.0	63.432	11.3
6	12 : 30	63.392	7.3	63.389	7.0	63.470	15.1	63.498	17.9
7	13 : 30	63.363	4.4	63.370	5.1	63.348	2.9	63.366	4.7
8	14 : 00	63.349	3.0	63.337	1.8	63.413	9.4	63.427	10.8
9	14 : 30	63.337	1.8	63.321	0.2	63.466	14.7	63.357	3.8
10	15 : 00	63.256	-6.3	63.259	-6.0	63.114	-20.5	63.119	-20.0
11	15 : 30	63.296	-2.3	63.294	-2.5	63.171	-14.2	63.166	-15.3
12	16 : 00	63.280	-3.9	63.268	-5.1	63.260	-5.9	63.227	-9.2

D'emblée, on voit que les erreurs varient au cours de la journée, de façon assez régulière. On voit aussi que la tendance est la même pour les visées vers A et vers B , aussi pour les secondes mesures. Pour quantifier ces constatations, calculons l'écart-type des premières déterminations de l'altitude par les visées vers A et vers B .

$$\sigma_{A_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{A_1}^\top \varepsilon_{A_1}}{12}} = \sqrt{\frac{215}{12}} = 4.2 \text{ cm}$$

$$\sigma_{B_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{B_1}^\top \varepsilon_{B_1}}{12}} = \sqrt{\frac{1753}{12}} = 12.1 \text{ cm}$$

L'écart-type issu des visées vers B est nettement plus grand. Ceci est dû aux visées plus longues et à l'effet plus grand des variations de l'atmosphère au cours de la journée. Calculons maintenant la covariance, puis la corrélation entre ces mesures.

$$\sigma_{A_1 B_1} = \frac{\varepsilon_{A_1}^\top \varepsilon_{B_1}}{12} = \frac{537.96}{12} = 44.83 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{A_1 B_1} = \frac{\sigma_{A_1 B_1}}{\sigma_{A_1} \cdot \sigma_{B_1}} = \frac{44.83}{4.2 \cdot 12.1} = 0.87$$

Cette forte corrélation positive montre que la majeure partie de l'erreur n'est pas aléatoire : l'atmosphère varie de façon uniforme dans le voisinage. Pour évaluer l'utilité de répéter les mesures, calculons la corrélation entre les résultats issus des deux mesures.

$$\begin{aligned}
 \rho_{A_1 A_2} &= \frac{\sigma_{A_1 A_2}}{\sigma_{A_1} \cdot \sigma_{A_2}} = \frac{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{A_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}}{12}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{A_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_1}}{12}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}}{12}}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{A_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{A_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{A_2}}} \\
 &= \frac{211.72}{\sqrt{214.62 \cdot 220.67}} = 0.97 \\
 \rho_{B_1 B_2} &= \frac{\sigma_{B_1 B_2}}{\sigma_{B_1} \cdot \sigma_{B_2}} = \frac{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}}{12}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_1}}{12}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}}{12}}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{B_1}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}^\top \boldsymbol{\varepsilon}_{B_2}}} \\
 &= \frac{1608.95}{\sqrt{1753.12 \cdot 1643.14}} = 0.95
 \end{aligned}$$

Ici également, on trouve une forte corrélation positive. Lorsque la majeure partie de l'erreur est de nature systématique, une répétition de la mesure n'apporte que peu d'information nouvelle. L'apport modeste des répétitions pour la précision du résultat peut être démontré en considérant tous les résultats des mesures vers A et vers B .

Posons $\boldsymbol{\varepsilon}_A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{A_1} \\ \varepsilon_{A_2} \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_B = \begin{bmatrix} \varepsilon_{B_1} \\ \varepsilon_{B_2} \end{bmatrix}$ puis calculons l'écart-type de ces valeurs.

$$\sigma_A = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_A^\top \boldsymbol{\varepsilon}_A}{24} = \sqrt{\frac{435}{24}} = 4.3 \text{ cm} \approx \sigma_{A_1} (4.2 \text{ cm})$$

$$\sigma_B = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_B^\top \boldsymbol{\varepsilon}_B}{24} = \sqrt{\frac{3414}{24}} = 11.9 \text{ cm} \approx \sigma_{B_1} (12.1 \text{ cm})$$

Ces résultats sont très proches de ceux que l'on avait obtenus en ne considérant que les premières mesures. En revanche, répéter une mesure permet de déceler une faute éventuelle, surtout si le processus est repris à la base et que la mesure est effectuée par une autre personne. Alors que l'apport est modeste pour la précision, il est considérable pour la *fiabilité*.

On a pu cerner l'importance des diverses mesures. En l'occurrence, il vaut mieux répartir quelques mesures au cours de la journée que d'en effectuer beaucoup pendant une brève période. En mesurant dans des conditions atmosphériques diverses, il est probable que la moyenne corresponde au modèle standard de la réfraction.

Si l'on veut accroître la précision sans perdre de temps sur le terrain, il existe deux alternatives :

- mesurer les paramètres de l'atmosphère (sur toute la visée) et mieux modéliser l'effet de la réfraction.

- adopter un processus de mesure qui élimine les erreurs systématiques, en l'occurrence, effectuer des *visées réciproques*, c'est-à-dire observer simultanément les angles zénithaux de A vers P et de B vers P.

La statistique contribue à :

- déceler des fautes,
- estimer la précision,
- améliorer les résultats,
- prévoir des mesures efficaces.

La statistique permet de fixer des priorités et des limites quant au soin nécessaire pour modéliser les phénomènes observés. Toutefois, elle ne suffit pas pour générer des modèles pertinents. Pour chaque application, il faut maîtriser les phénomènes physiques, chimiques ou biologiques qui influencent les mesures.

1.4 Interprétation probabiliste de la notion d'écart-type

1.4.1 Une variable aléatoire

Considérons 100 réalisations de la variable aléatoire x , suivant une loi normale, d'espérance $E\{x\}$ et d'écart-type σ , représentées par des petits traits verticaux sur la figure 1.4. Un histogramme illustre leur distribution.

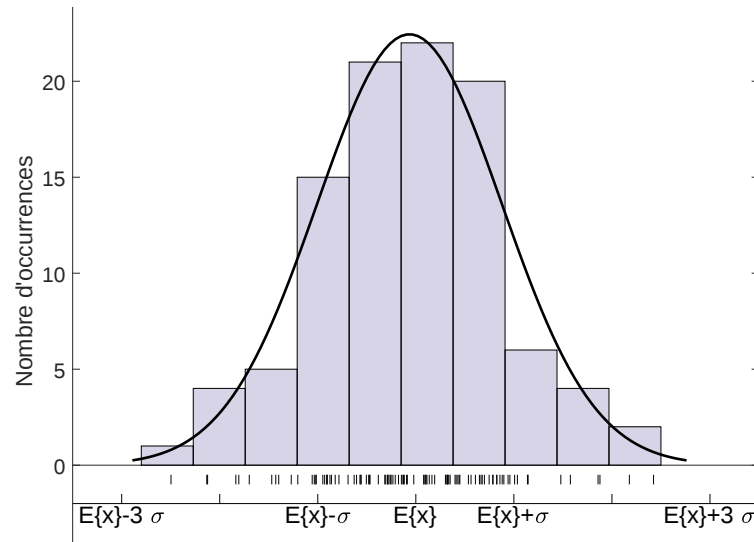


FIGURE 1.4 – tirage de 100 réalisations de la variable aléatoire x , histogramme de ce tirage et loi normale associée

On définit l'intervalle d'erreur : $[E\{x\} - \sigma, E\{x\} + \sigma]$. Si la variable étudiée suit une loi normale, cet intervalle contient environ 68% des réalisations (Figure 1.5).

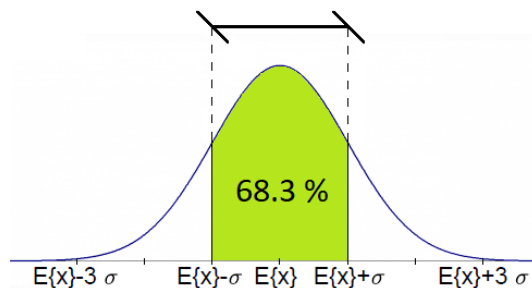


FIGURE 1.5 – L'intervalle de confiance à un sigma correspond à une probabilité de 68%.

On définit des intervalles de confiance en choisissant un facteur multiplicatif k pour l'écart-type : $[E\{x\} - k\sigma, E\{x\} + k\sigma]$. Par exemple, on peut construire l'intervalle de confiance avec un facteur trois : $[E\{x\} - 3\sigma, E\{x\} + 3\sigma]$, qui contient environ 99.7% des réalisations de la variable aléatoire x . De manière générale, le nombre de réalisations de la variable aléatoire x appartenant à l'intervalle de confiance à $k\sigma$ est donné par la table 1.1.

1.4.2 Deux variables aléatoires

On généralise les concepts d'intervalle d'erreur et d'intervalle de confiance en dimension supérieure. Considérons le cas d'un vecteur aléatoire de dimension 2 : un couple de variables aléatoires (x, y) . Ce couple peut représenter par exemple les coordonnées d'un point, ou un ensemble de deux mesures (Pression, Température), même si l'interprétation est moins intuitive.

x a pour écart-type σ_x et y a pour écart-type σ_y . La covariance entre x et y est σ_{xy} .

On construit la matrice de covariance $\mathbf{K}$ du vecteur aléatoire (x, y) de la manière suivante.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les variables x et y suivent des lois normales, cette matrice suffit à représenter le comportement stochastique du vecteur aléatoire (x, y) . La figure 1.6 représente le tirage de 100 réalisations.

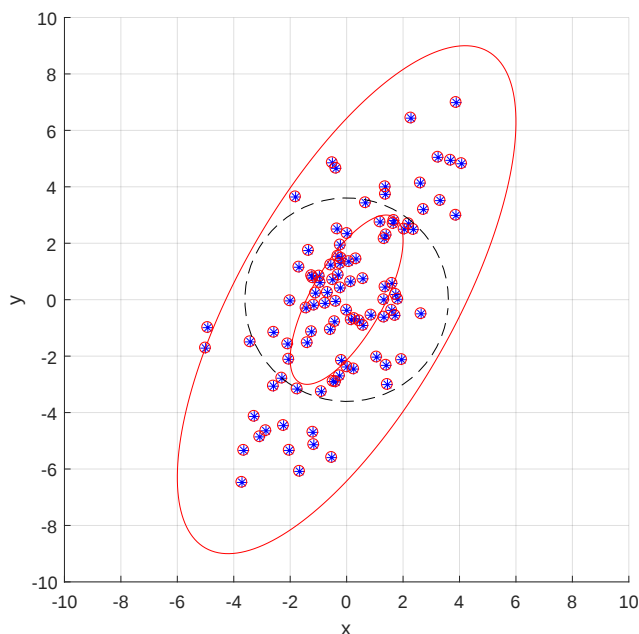


FIGURE 1.6 – tirage de 100 réalisations du couple de variables aléatoires (x, y) , ellipse d'erreur et ellipse de confiance à trois sigmas, cercle d'erreur en traitillé

La figure 1.7 présente ce tirage aléatoire dans la forme d'un histogramme en 3D.

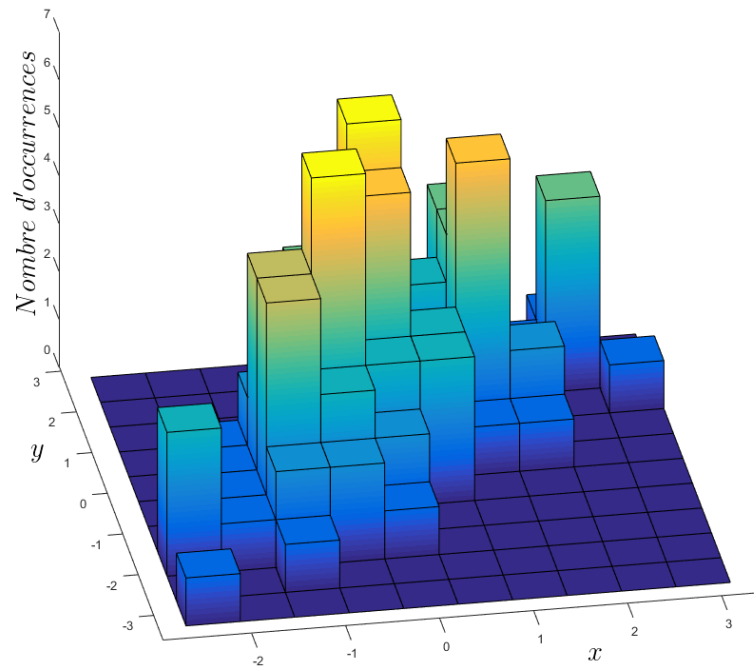


FIGURE 1.7 – histogramme du tirage aléatoire de la figure 1.6

Lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini, cette distribution tend vers une loi normale bi-variée (figure 1.8). L'équivalent en deux dimensions d'un intervalle d'erreur (respectivement d'un intervalle de confiance) est une ellipse d'erreur (respectivement une ellipse de confiance). On obtient ces ellipses en effectuant une section horizontale d'une loi normale bi-variée.

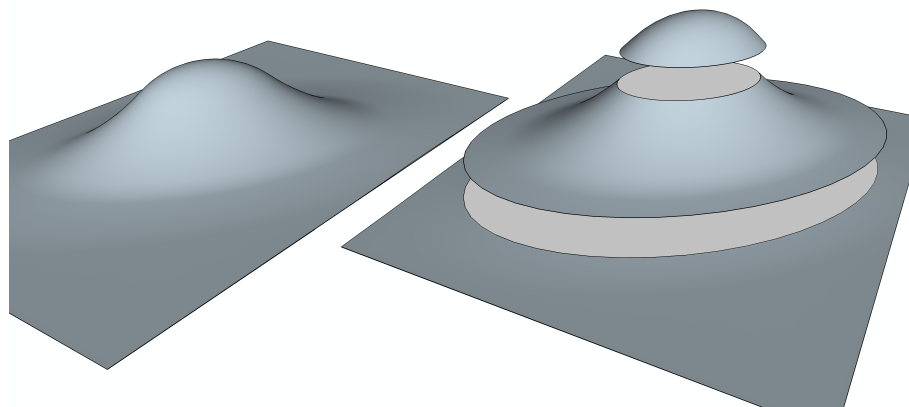


FIGURE 1.8 – loi normale bi-variée, sections de la surface à un sigma et à trois sigmas

La matrice de covariance $\mathbf{K}$ contient les éléments de l'ellipse d'erreur et la méthode proposée ci-dessous permet de la dessiner.

L'extension de l'ellipse suivant l'axe des abscisses est donnée par σ_x et celle suivant l'axe des ordonnées est donnée par σ_y (lignes traitillées de la figure 1.9). Cependant, ces deux

valeurs sont difficiles à appréhender dès que les variables sont corrélées. Ainsi, il est plus pratique de calculer le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse. Pour cela, il faut décomposer la matrice de covariance K en valeurs et vecteurs propres. Notons λ_1 la plus grande valeur propre de K , λ_2 la plus petite et V_1 et V_2 leurs vecteurs propres associés.

$$\begin{cases} KV_1 = \lambda_1 V_1 \\ KV_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases}$$

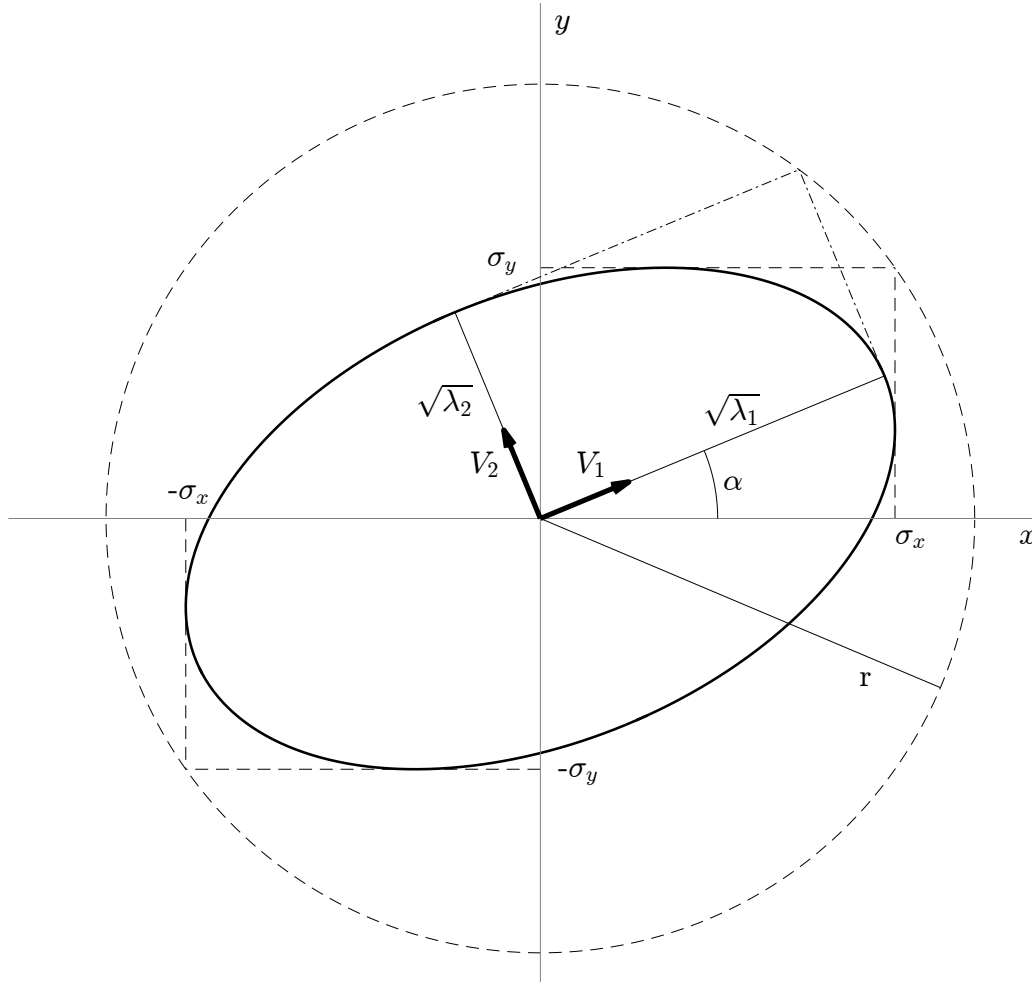


FIGURE 1.9 – ellipse d’erreur avec son extension en x et en y (lignes traitillées), ses vecteurs propres, ses demi-axes et son inclinaison, ainsi que le cercle d’erreur associé, de rayon r .

Cette décomposition en valeurs et vecteurs propres peut-être exprimée de manière classique (diagonalisation).

$$K \underbrace{\begin{bmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{bmatrix}}_V \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_\Lambda$$

La matrice V est composée de vecteurs unitaires (de norme 1) et orthogonaux. C’est une matrice dite orthogonale : telle que $VV^T = V^TV = I$.

$\sqrt{\lambda_1}$ est la norme du demi-grand axe et $\sqrt{\lambda_2}$ celle du demi-petit axe. Par rapport à

l'axe des abscisses, l'angle orienté α du grand axe de l'ellipse est donné par la formule ci-dessous.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}}\right)$$

Dans le repère (V_1, V_2) on exprime l'ellipse d'erreur en dessinant la fonction suivante.

$$\begin{cases} [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cos(t) \\ \sqrt{\lambda_2} \sin(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour représenter l'ellipse d'erreur correspondant à la matrice K il faut appliquer une rotation d'angle α .

$$\begin{cases} [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \cos(t) \\ \sqrt{\lambda_2} \sin(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.2)$$

La matrice des vecteurs propres V permet de représenter l'ellipse sans exprimer explicitement l'angle α .

$$\begin{cases} [0, 2\pi[& \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto V \cdot \sqrt{\Lambda} \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.3)$$

On construit l'ellipse de confiance avec un facteur k multipliant les demi-axes de l'ellipse d'erreur. Cette ellipse contient alors une certaine proportion des réalisations du couple de variables aléatoires, donnée dans la table 1.1.

facteur k	dans un intervalle	dans une ellipse
1	68.3%	39.4%
1.18		50.0%
1.96	95.0%	
2	95.4%	86.5%
2.45		95.0%
2.58	99.0%	
3	99.7%	98.9%
3.03		99.0%

TABLE 1.1 – Indice de probabilité que la réalisation d'une variable aléatoire soit comprise dans un intervalle de confiance ou une ellipse de confiance.

Si un couple de variables aléatoires suit une loi normale, l'ellipse d'erreur contient 39.4% de ses réalisations. Pour un même facteur les pourcentages changent entre l'intervalle et l'ellipse. De plus, la probabilité d'être à l'intérieur de l'ellipse d'erreur (39.4%) n'est pas la moitié de la valeur applicable pour un intervalle (68.3%).

Souvent, on résume la statistique d'un couple de variables aléatoires (x, y) avec une seule valeur : le rayon du cercle d'erreur (traitillé sur la figure 1.9). Ce faisant on ignore l'aplatissement de l'ellipse et son inclinaison.

Le rayon du cercle d'erreur est invariant par la rotation. Ainsi, au lieu d'être calculé à partir

de la matrice $\mathbf{K}$, représentée par l'équation paramétrique (1.2), son rayon peut être calculé à partir de la matrice $\mathbf{\Lambda}$ représentée par l'équation paramétrique (1.1).

$$r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{\Lambda})}$$

D'un point de vue probabiliste, r définit le cercle d'erreur moyenne. 68.3% des réalisations du couple de variables aléatoires (x, y) se trouvent à l'intérieur, et 99.7% de ses réalisations se trouvent dans le cercle de rayon $3r$.

1.4.3 Trois variables aléatoires

Le concept d'intervalle et d'ellipse d'erreur peut être étendu à 3 dimensions pour former un ellipsoïde d'erreur (Figure 1.10).

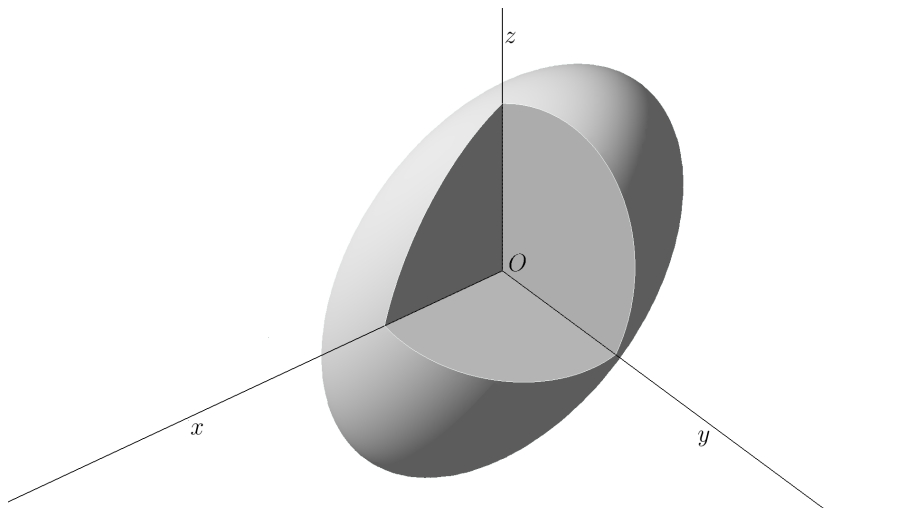


FIGURE 1.10 – Ellipsoïde d'erreur

La notion d'ellipsoïde de confiance est identique à celle d'ellipse, mais le même facteur correspond à un pourcentage différent. Ce concept peut être étendu aux dimensions supérieures. On conserve le terme d'ellipsoïde, mais sa visualisation est difficile.